611

項書換え系の計算量解析の自動化

河口 信夫　　坂部 俊樹　　稲垣 康善 (名古屋大学)

1　はじめに

項書換え系 (TRS) における効率化変換 [2] では効率の解析が重要であり．これまでは実際のプログラムの実行や．人間による概算により求められていた．本稿では規則を漸化式に変換し TRS の効率を導出する手法を示す．効率を判断する基準としては様々なものが考えられるが，本稿では書換え回数に基づく効率を採用する．

2　項書換え系 (Term Rewriting Systems:TRS)

TRS については [1] 等を参照されたい．本手法が適用可能な TRS は．無曖昧，左線形で停止性を持ち．関数記号には構成子記号と被定義関数記号の区別がある．また．被定義関数は全域的である．

3　効率の評価関数

TRS の計算は主に再帰により行なわれる．任意の項に対しどの程度再帰が行なわれるかを示す再帰度と呼ばれる非負整数を導入する．

【定義 3.1】再帰度: 構成子記号 f に対する非負整数関数 V_f．及び変数 $x_j \in Var$ に対する再帰度 X_j が与えられている時．任意の項 t に対する再帰度 $V[t]$ は以下のように定義される．

$$V[t] = \begin{cases} X_j & (t = x_j \in Var) \\ V_f(V[t_1], \ldots, V[t_n]) & (t = f(t_1, \ldots, t_n)) \end{cases}$$

被定義関数記号 f に対する再帰度構成関数 V_f は規則から導出する．すべての規則 $p_i \to q_i$ を $V[p_i] = V[q_i]$ という等式に変換し．これを連立方程式とみなし．すべての V_f を求める．□

規則の左辺の項の書換え回数は右辺の項より 1 だけ多いことに注目し．書換え回数を求める関数を再帰度を用いて定義する．

【定義 3.2】書換え回数: 任意の項 t に対する書換え回数 $C[t]$ は以下のように定義される．ただし X'_j は変数 x_j に対する書換え回数を表す．

$$C[t] = \begin{cases} X'_j & (t = x_j \in Var) \\ C_f(V[t_1], \ldots, V[t_n]) + C[t_1] + \ldots + C[t_n] & (t = f(t_1, \ldots, t_n)) \end{cases}$$

構成子記号 f に対する書換え回数構成関数 C_f はすべて 0 であり．f が被定義関数記号の場合は規則から導出する．すべての規則 $p_i \to q_i$ を $C[p_i] = 1 + C[q_i]$ という等式に変換し．漸化式の解として C_f を求める．□

構成子記号 f の再帰度構成関数 V_f は次のように与えられる．例えば自然数を表す構成子 $\{0, s\}$ では $V_0 = 0, V_s(x) = x + 1$ となる．

4　効率の導出例

例として階乗の計算をとりあげる．以下に整数の加算 (add) の規則を示す．ただし．整数は 0 と 1 加算関数 s によって表されている．

$$\text{A1:} \quad add(0, y) \to y \quad , \quad add(s(x), y) \to s(add(x, y))$$

定義より再帰度構成関数 V_{add} を求める．最初の規則より $V[add(0, y)] = V[y]$ すなわち $V_{add}(0, V[y]) = Y$．第 2 の規則より $V[add(s(x), y)] = V[s(add(x, y)]$．$V_{add}(1+V[x], V[y]) = V_s(V[add(x, y)]) = 1+V_{add}(X, Y)$．よって方程式 $V_{add}(0, Y) = Y, V_{add}(X+1, Y) = 1 + V_{add}(X, Y)$ が得られ．これを解くと $V_{add}(X, Y) = X + Y$ が得られる．

次に書換え回数構成関数 C_{add} を求める．最初の規則より $C[add(0, y)] = 1+C[y]$ となり $C_{add}(0, Y) = 1$ が得られ．第 2 の規則より $C[add(s(x), y)] = 1+C[s(add(x, y))]$．$C_{add}(V[s(x)], V[y])+C[s(x)]+C[y] = 1+C[add(x, y)]$．$C_{add}(X+1, Y) = 1 + C_{add}(X, Y)$ が得られる．よって方程式の解として $C_{add}(X, Y) = X + 1$ が得られる．

同様に乗算 ($mult$)．階乗 ($fact$) の再帰度構成関数．書換え回数構成関数は以下の規則から求めることができる．

$$\text{M1:} \quad mult(0, y) \to 0 \quad , \quad mult(s(x), y) \to add(y, mult(x, y))$$

$$\text{F1:} \quad fact(0) \to s(0) \quad , \quad fact(s(x)) \to mult(s(x), fact(x))$$

計算の結果 $mult$, $fact$ に対する再帰度構成関数はそれぞれ $V_{mult}(X, Y) = X * Y, V_{fact}(X) = X!$ となる．乗算に対する書換え回数構成関数は規則から導出された方程式 $C_{mult}(0, Y) = 1, C_{mult}(X+1, Y) = C_{mult}(X, Y) + C_{add}(Y, X*Y) + 1 = C_{mult}(X, Y) + Y + 2$ より得られ．$C_{mult}(X, Y) = X(Y+2)+1$ である．同様に $C_{fact}(X) = \Sigma_{k=1}^{X} k! + X^2 + 3X + 1$ が得られる．この結果を用いて．例えば $t = fact(s^6(0)))$ の書換え回数 $C[t] = 928$ を数値計算のみにより得ることができる．

5　まとめ

項書換え系の効率を形式的に求める手法を提案した．構成子記号 f に対する再帰度構成関数 V_f をどのように与えるか．また最外戦略や必須戦略を用いた場合の効率の解析などが今後の課題である．

参考文献

[1] Huet, G.:"Confluent Reductions:Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems", J.ACM, Vol.27, No.4, pp797-821 (1980).

[2] 河口，坂部，稲垣: "可換則に基づく項書換え系の変換と必須呼びによる効率の評価", COMP93-64(1993).